Данная серия методичек посвящается лучшему преподавателю по электроду

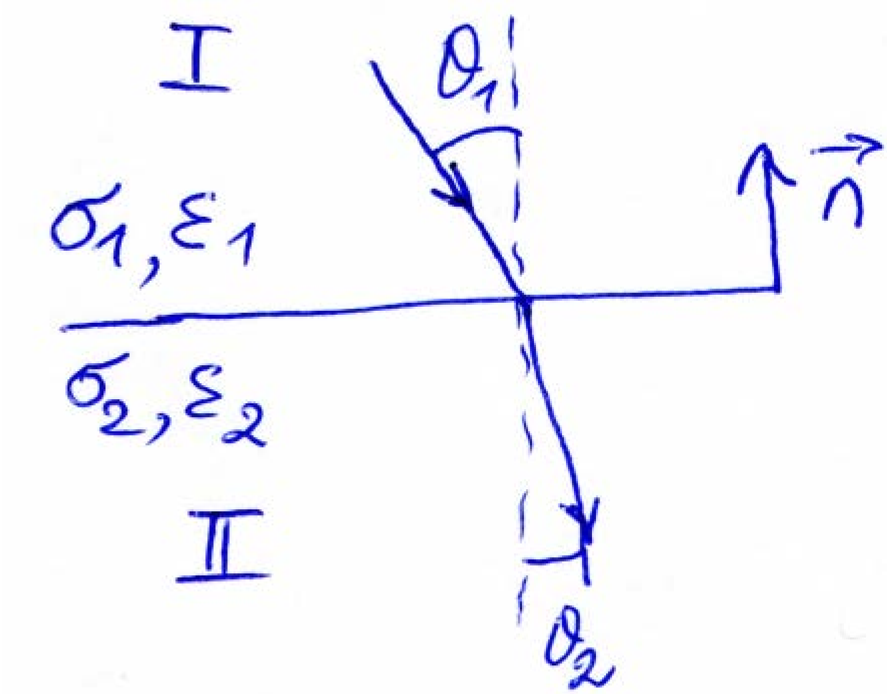
Семинарист: А вы знаете Николая Николаевича Боголюбова, основателя кафедры квантовой статистики? Вот он Библию наизусть знал. По крайней мере, мне так говорили.

5 семинаров – 19,20,21,22,23 – мы занимались электростатикой, где были покоящиеся заряды, электрическое поле и никакого магнитного поля. Наконец-то что-то поинтереснее – стационарные (постоянные) токи! Магнитное поле! Ееее! Будем ими заниматься на семинарах 24 и 26.

Формулу $\mathbf{j}=\sigma\mathbf{E}$ (дифференциальный закон Ома) все знают.

ЗАДАЧА 24.1

24.1. Найти закон преломления линий тока на границе раздела двух сред. Найти плотность поверхностных зарядов.



Как мы уже знаем, $\mathbf{E}_{\textbf{поверхн 1}}= \mathbf{E}_{\textbf{поверхн 2}}$, а т.к. $\mathbf{j}=\sigma\mathbf{E}$, то $\mathbf{j}_{\textbf{поверхн 1}}/\sigma_1= \mathbf{E}_{\textbf{поверхн 2}}/\sigma_2$. Также на границе на скапливается заряд, т.е. $\mathbf{j}_{\textbf{норм 1}} = \mathbf{j}_{\textbf{норм 2}}$.
Распишем $\mathbf{j}_{\textbf{поверхн}}$ и $\mathbf{j}_{\textbf{норм}}$ через sin и cos θ_1 и θ_2. Получим
$j_1 \sin\theta_1 /\sigma_1= j_2 \sin\theta_2 /\sigma_2$
$j_1 \cos\theta_1 = j_2 \cos\theta_2$
Делим одно на другое:
$\tan \theta_1 /\sigma_1= \tan \theta_2 /\sigma_2$, или $\tan \theta_1 / \tan \theta_2 = \sigma_1 /\sigma_2$. Этакий аналог закона преломления для света, только тут отношение тангенсов, а там синусов.

Теперь про плотность поверхностных зарядов, которую от нас тоже требуют. Формулу σ=скачок $E_n/4\pi$ помним? (Только теперь поверхностную плотность придётся обозначить как $\rho_{пов}$, потому что буква σ занята под проводимость). Вот и получаем для поверхностной плотности

$$\frac{1}{4\pi}\left(E_n^{I}-E_n^{II}\right)=\frac{j_n}{4\pi}\left(\frac{1}{\sigma_1}-\frac{1}{\sigma_2}\right)$$

Она складывается из поверхностной плотности связанных и свободных зарядов.

Если бы нас попросили подсчитать только свободные, то это было бы

$$\rho_{пов}^{своб}=\frac{1}{4\pi}\left(D_n^{I}-D_n^{II}\right)$$ - уже скачок D.

Помните, что я говорил в Электроде 22? E – это всё поле, а D – это поле только от свободных зарядов, Ь=-P – от связанных. E = D + (-P). Поэтому скачок E относится к поверхностной плотности всех зарядов, а скачок D к поверхностной плотности только свободных.

ЗАДАЧА 24.2

24.2. Найти плотность объемных зарядов в неоднородном проводнике со стационарным током.

div **D** = 4πρ(**r**)

D = ε(**r**)**E**

j = σ(**r**)E

Проделываем подстановки:

div (ε(**r**)***j**/ σ(**r**))= 4πρ(**r**);

ρ(**r**)= div (ε(**r**)***j**/ σ(**r**)) / (4π)

Ответ можно немного упростить, записав его в виде

ρ(**r**)= **j** *grad (ε(**r**)/ σ(**r**)) / (4π)

ЗАДАЧА 24.3

24.3. В плохо проводящую среду (например, электролит) опущены хорошо проводящие стержни. Известны потенциал каждого стержня и полный стекающий с него ток. Найти джоулево тепло, выделяющееся за единицу времени.

Мы знаем потенциал каждого стержня => напряжение между ними, U.

Также знаем ток I.

От нас спрашивают мощность. Ответ $P=UI=(\varphi_2-\varphi^1)U$? Да ☺ Чугреев получает тот же ответ, но выкладками на страницу.

ЗАДАЧА 24.4

24.4. Найти сопротивление заземления между шарами с радиусами a и b, расположенными на большом расстоянии L, ($L \gg a \sim b$) и помещенными в плохо проводящую среду с проводимостью σ.

Нам потребуется вот такое утверждение: $\oint \vec{E}\vec{n}\,dS = 4\pi q$

Но σ**E**=**j**, поэтому

$4\pi\sigma q = \oint \vec{j}\vec{n}\,dS = I$

Далее предлагаю выразить сопротивление через ёмкость:

$R = \frac{U}{I} = \frac{q/C}{I} = \frac{1}{C}\frac{q}{I} = \frac{1}{C}\frac{q}{4\pi\sigma q} = \frac{1}{C}\cdot\frac{1}{4\pi\sigma}$

Осталось подставить ёмкость, которую мы уже считали. В нулевом приближении это $\frac{1}{C} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, в первом $\frac{1}{C} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{2}{L}$. Выбирайте любое.

ЗАДАЧА 24.6

24.6. Найти векторный потенциал и магнитное поле бесконечно длинного прямого провода с током J, равномерно распределенным по сечению проводника (цилиндр радиуса R). Найти также скалярный потенциал магнитного поля вне проводника.

Идём гуглить одно из уравнений Максвелла в интегральной форме, известное как теорема о циркуляции магнитного поля:

$$\oint_{\mathbf{l}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} I + \frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int_{\mathbf{s}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s}$$

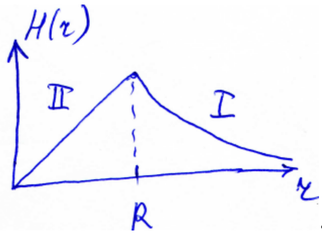
Последнего слагаемого, очевидно, нет (потому что всё статично), поэтому

$$\oint_{\mathbf{l}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} I(r)$$

Где I(r) – ток, протекающий через сечение радиусом r. При r>= это просто I. Интеграл будет равен H(r) * длину окружности, 2πr.

Отсюда при r>R H(r) * 2πr = $\frac{4\pi}{c} I$ => H(r) = $\frac{2I}{rc}$

При $r<R$ $I(r)=I*r^2/R^2$, поэтому $H(r) * 2\pi r = \frac{4\pi}{c}I * r^2/R^2 \Rightarrow H(r) = \frac{2Ir}{R^2c}$.

График будет какой-то такой: 

.

Мы нашли **H**(**r**), которая равна в силу $\mu=1$ также **B**(**r**).

От нас ещё спрашивают **A** снаружи стержня (любой из возможных). Будем искать **A** в цилиндрической СК: $\{A_r, A_\varphi, A_z\}$ и от нас треба rot **A** = **B** = $\{0; \frac{2I}{\rho c}; 0\}$ ($H_r=H_z=0$, $H_\varphi=\frac{2I}{\rho c}$).

Гуглим «ротор в цилиндрической СК»:

$$\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\hat{\boldsymbol{\rho}} + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right)\hat{\boldsymbol{\varphi}} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial\rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}\right)\hat{\boldsymbol{z}}$$

Получаем, что нам надо найти хоть одно решение системы

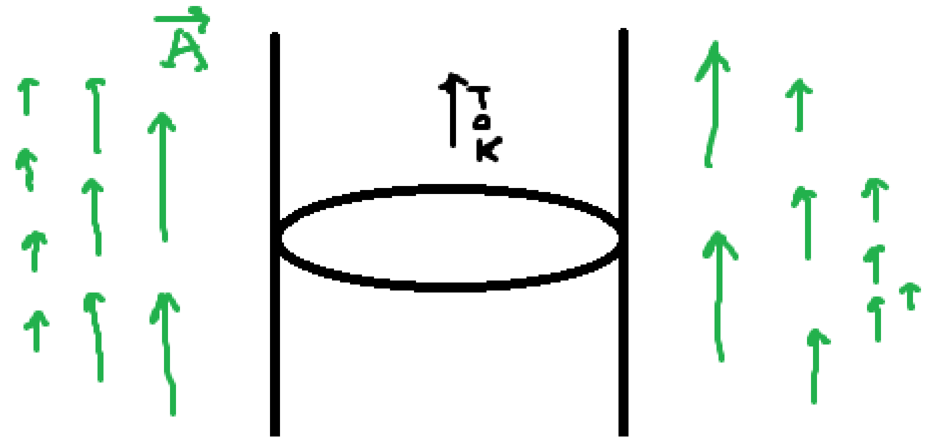
$$\frac{\partial A_z}{\rho\partial\varphi} = \frac{\partial A_\varphi}{\partial A_z}, \quad \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial\rho} = \frac{2I}{c\rho}; \quad \frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial\rho} = \frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}$$

Как её решать? Разумно в силу симметрии предположить $A_\varphi=0$, а производные по φ положить нулями. Тогда первое и третье равенства будут выполнены автоматически. А второе… ну хотя бы

$A_\rho=\frac{2I}{\rho c}*z$

$A_z=0$.

Можно предложить и иначе: $A_\rho=0$, $A_z = -\rho*\frac{2I}{\rho c}=2I/(\rho^2c)$. Вот такая вот будет картинка:



А ещё от хотят скалярный магнитный потенциал. Это что за фрукт? Это совершенно бесполезный (в данной задаче) фрукт, но раз попросили – это такая скалярная величина Ψ(**r**), что grad Ψ = **B**.

Давайте напишем градиент в цилиндрической СК:

grad f = $\frac{\partial f}{\partial \rho}\hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}}$

должен быть равен $\frac{2I}{\rho c}$. Явно годится $\Psi = \frac{2I\varphi}{c}$.

Замечание. Иногда Ψ определяют по-другому: не grad Ψ = **B**, а -grad Ψ = **B**. (Например, так делает Чугреев). Единственная цель у минуса – всех бесить, никакого физического смысла у него нет.